UNIVERSITE PARIS-DAUPHINE

FINANCES-103

CHAPITRE 2

EVALUATION DES TITRES A REVENU FIXE

Responsable:

Professeur Jean-Richard SULZER

EVALUATION DES TITRES A REVENU FIXE

1° Supposons qu'un particulier souhaite céder une créance relative :
– à un emprunt indivis ;
– ou à un emprunt obligataire.

On a vu précédemment (à la note technique I) que ce prêteur avait exigé un taux de rendement θ qui égalisait les valeurs actuelles de son versement et de ses encaissements futurs. Mais il se peut que l'acquéreur potentiel de la créance n'utilise pas, pour évaluer l'emprunt ou le titre, le même taux d'actualisation θ.

Il se peut que cet acquéreur exige, en fait, un taux de rendement **t** supérieur à θ, ou, qu'au contraire, il se contente en fait d'un taux de rendement **t** inférieur à θ .

De manière plus général les différents investisseurs vont donc <u>évaluer</u> les titres à des taux t qui ne sont pas nécessairement identiques.

2° Les différences dans les taux d'évaluation peuvent résulter :

a) pour un titre donné, d'une variation dans le temps du loyer de l'argent à long terme sur le marché financier (entre 4 % et 19 % durant les vingt dernières années).

b) à un moment donné : d'une des caractéristiques des titres considérés.

Yves SIMON[1] distingue à cet égard cinq déterminants du taux de rendement des titres financiers à revenu fixe :

- le risque ;
- la négociabilité ;
- la divisibilité ;
- le traitement fiscal ;
- et les clauses de remboursement.

A ces cinq déterminants, il faut en rajouter un sixième : la maturité

3° Donc, si le montant des flux financiers générés par l'entrée d'un titre donné dans un patrimoine est connu à l'avance, il n'en reste pas moins que l'évaluation de ce titre peut varier selon le taux d'évaluation adopté, c'est-à-dire exigé, par divers investisseurs.

[1]"Marché des capitaux et taux d'intérêt", Economica.

4° DEFINITIONS

a) On désignera donc sous le terme d'évaluation ou de valeur estimée d'une créance, la valeur actualisée V, au taux **t**, et à un moment donné, des annuités restant à échoir.

Cependant, pour simplifier les calculs, on est amené à distinguer, les deux composantes des annuités futures (intérêts et amortissements) ; et à décomposer l'évaluation en usufruit et en nue-propriété.

b) l'usufruit global, U, d'une créance est donc la somme actualisée au taux **t**, des intérêts restant à échoir.

c) la nue-propriété globale, P, est la valeur estimée, dans les mêmes conditions des amortissements contenus dans les annuités non échues.

Donc

$$\boxed{V = U + P} \quad (401)$$

d) l'usufruit unitaire.

Si K est le montant de l'emprunt, et i le taux d'intérêt nominal, on définit l'usufruit unitaire (u) par :

$$\boxed{u = \frac{U}{K.i}} \quad (402)$$

e) la nue propriété unitaire : (p), est définie par la formule

$$\boxed{p = \frac{P}{K}} \quad (403)$$

Donc

$$\boxed{V = K.i.u + K.p} \quad (404)$$

Il est important de souligner que les notions d'usufruit et de nue-propriété sont essentiellement des moyens mnémotechniques, destinés à simplifier les formules d'évaluation qui vont suivre.

5) Relation fondamentale entre l'usufruit unitaire (u) et la nue-propriété unitaire (p)

En utilisant les notations des sections II et III de la note technique I;

par définition :

$$u = \frac{1}{Ki}\left[D_0.i\,(1+t)^{-1} + D_1.i\,(1+t)^{-2} + D_2.i(1+t)^{-3} + \ldots\ldots + D_{l-1}.i(1+t)^{-l} + \ldots.+ D_{n-1}.i(1+t)^{-n}\right]$$

soit en simplifiant par i

$$\boxed{u = \frac{1}{K}\left[D_0(1+t)^{-1} + D_1\,(1+t)^{-2} + D_2(1+t)^{-3} + \ldots\ldots + D_{l-1}.\,(1+t)^{-l} + \ldots.+ D_{n-1}(1+t)^{-n}\right]} \quad (405)$$

Par définition :

$$p = \frac{P}{K} = \frac{1}{K}\left[m_1(1+t)^{-1} + m_2\,(1+t)^{-2} + m_3(1+t)^{-3} + \ldots\ldots + m_{l-1}(1+t)^{-l+1} + \ldots\ldots + m_n(1+t)^{-n}\right]$$

en multipliant u par (1+t) on obtient :

$$u\,(1+t) = \frac{1}{K}\begin{bmatrix} D_0 + D_1(1+t)^{-1} + D_2(1+t)^{-2} + D_3(1+t)^{-3} + D_4(1+t)^{-4} + \ldots \\ \ldots + D_{l-1}(1+t)^{-l+1} + \ldots\ldots + D_{n-1}(1+t)^{-n+1} \end{bmatrix}$$

Donc

$$u\,(1+t) + p = \frac{1}{K}\begin{bmatrix} D_0 + (D_1 + m_1)(1+t)^{-1} + (D_2 + m_2)(1+t)^{-2} + (D_3 + m_3)(1+t)^{-3} + \ldots\ldots \\ + (D_{l-1} + m_{l-1})(1+t)^{-l+1} + \ldots\ldots + (D_{n-1} + m_{n-1})(1+t)^{-n+1} + m_n\,(1+t)^{-n} \end{bmatrix}$$

On note que : $D_1 + m_1 = D_0$, $D_2 + m_2 = D_1$, $D_3 + m_3 = D_2$, ... $D_{n-1} + m_{n-1} = D_{n-2}$
et $D_{n-1} = m_n$

On a donc :

$$u\,(1+t)+p = \frac{1}{K}\Big[D_0 + D_0\,(1+t)^{-1} + D_1\,(1+t)^{-2} + \ldots.. + D_{l-2}(1+)^{-l+1}$$
$$+ D_{l-1}\,(1+t)^{-l} + \ldots.. + D_{n-1}\,(1+t)^{-n}\ \Big]$$

La somme entre crochet est égale à : K+uK (cf. formule 405)

Donc $u\,(1+t)+p = \frac{1}{K}\,[D_0 + uK] = \frac{1}{K}\,[K + uK] = 1+u$

$\Rightarrow$

$u + ut + p = 1 + u$

soit :

$$\boxed{ut + p = 1} \qquad (406)$$

de la formule (406), on en déduit que :

$$\boxed{u = \frac{1-p}{t}} \qquad (407)$$

Or, par définition si l'on se réfère à la formule (404) :

$$V = Kiu + K_p = Ki\,\frac{1-p}{t} + Kp = K\frac{i}{t} + Kp\,(1-\frac{i}{t})$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{V = K\left[\frac{i}{t} + (1-\frac{i}{t})p\right]} \qquad (408)$$

et ce, $\forall$ K, i, n, t, et le rythme d'amortissement :

Il nous suffira donc de connaître la valeur de p, (nue-propriété unitaire) d'un type d'emprunt donné, pour évaluer cet emprunt.

6) Propriétés communes à tous les types d'emprunt

propriété 1

$$\boxed{p < 1} \qquad (409)$$

En effet :

$$p = \frac{P}{K} = \frac{\sum_{l=1}^{n} m_l \; (1+t)^{-l}}{\sum_{l=1}^{n} m_l}$$

$$t > 0 \quad \Rightarrow p < 1$$

propriété 2 : Comparaison de V et de K

On a démontré à la formule (408) que :

$$V = K\left[\frac{i}{t} + (1 - \frac{i}{t})p\right]$$
$$= K\left[\frac{i}{t} + (1 - \frac{i}{t})p + 1 - 1\right] =$$

$$= K\left[(1 - \frac{i}{t})\,(p - 1) \;+\; 1\right]$$
$$\Rightarrow$$
$$V - K = K\left[(1 - \frac{i}{t})\,(p - 1)\right]$$

Or :

- $K > 0$
- et $p - 1 < 0$

Donc, le signe de $V - K$ est l'opposé du signe de $(t - i)$

Conclusion : :

$$\boxed{\begin{array}{l} t < i \Rightarrow V > K \\ t = i \Rightarrow V = K \\ t > i \Rightarrow V < K \end{array}} \quad (410)$$

7) **<u>Nue propriété unitaire pour les emprunts indivis les plus courants</u>**

a) <u>emprunt remboursable en une seule fois à l'échéance ou in fine</u>

on a : $m_1 = m_2 = m_3 = ... m_{n-1} = 0$ et $m_1 = K$

$$P = K\,(1+t)^{-n}$$

$\Rightarrow$

$$p = \frac{P}{K} = (1+t)^{-n}$$

$$\boxed{p = (1+t)^{-n}} \quad (411)$$

b) <u>emprunt à amortissements constants annuels</u>

$$m_1 = m_2 = ... = m_n = \frac{K}{n} =$$

$\Rightarrow$

$$P = \sum_{k=1}^{n} m_k (1+t)^{-k} = \frac{K}{n} \sum_{k=1}^{n} (1+t)^{-k} = \frac{K}{n}\ \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

d'où :

$$\boxed{p = \frac{P}{K} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}} \quad (412)$$

c) rente perpétuelle

$$\lim_{n \to \infty} P = m\,(1+t)^{-\infty} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{p = 0} \quad (413)$$

d) emprunts à annuités constantes

on sait que : $m_{p+1} = m_p\ (1+i)$

par ailleurs, $P = m_1\ (1+t)^{-1} + m_2\ (1+t)^{-2} + ... + m_n\,.\,(1+t)^{-n}$

or $m_1 = \dfrac{K.i}{(1+i)^n - 1}$

Donc,

$$P = \frac{K\,.\,i}{(1+i)^n - 1}\left[\frac{1}{1+t} + \frac{1+i}{(1+t)^2} + ... + \frac{(1+i)^k}{(1+t)^{k+1}} + ... + \frac{(1+i)^{n-1}}{(1+t)^n}\right]$$

La somme de la série géométrique a déjà été établie (voir la démonstration de la formule (112) de la note technique I)

$$P = \frac{K.i}{(1+i)^n - 1} . \frac{1-\left[(1+i)^n.(1+t)^{-n}\right]}{t-i}$$

$$= \frac{K.i}{(1+i)^n - 1} . (1+i)^n \frac{(1+i)^{-n} - (1+t)^{-n}}{t-i}$$

$$= \frac{K.i}{1-(1+i)^{-n}} \frac{(1+i)^{-n} - (1+t)^{-n}}{t-i}$$

Or $p = \frac{P}{K}$.

d'où

$$\boxed{p = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} . \frac{(1+i)^{-n} - (1+t)^{-n}}{t-i}} \quad (414)$$

N.B. Il est plus facile d'utiliser $V = a. \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ qui aboutit au même résultat.

<u>**8) Cas des emprunts obligataires**</u>

<u>**Il est nécessaire dans ce cas de modifier ici légèrement certaines notations.**</u>

a) <u>notations</u> :

On désignera par N le nombre d'obligations <u>encore vivantes</u> au moment de l'évaluation.

On peut écrire :

$$\frac{V}{N} = \frac{U}{N} + \frac{P}{N}$$

$\frac{V}{N}$, qui sera noté Vm , est l'évaluation moyenne d'une obligation ou valeur intrinsèque ; c'est à dire en fait son cours théorique.

$Um = \frac{U}{N}$ est l'usufruit moyen.

$Pm = \frac{P}{N}$ est la nue-propriété moyenne.

Donc

$$\frac{V}{N} = \frac{U}{N} + \frac{P}{N}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V}{N} = Vm = \frac{K\,i\,u}{N} + \frac{Kp}{N}.$$

$$\boxed{Vm = C.\,i.\,u + Cp} \quad (415)$$

Donc

$$\boxed{Vm = C\left[\frac{i}{t} + (1-\frac{i}{t})\,p\right]}$$

(416)

b) <u>cas d'un emprunt remboursable au pair</u>

Il est évident que p dans ce cas, a, la même valeur que pour un emprunt indivis présentant la même loi d'amortissement.

c) <u>cas d'un emprunt remboursable au dessus du pair c'est à dire avec une prime de remboursement</u>

La formule (415) est légèrement modifiée.

En effet : V = U + P où P représente la somme actualisée des <u>remboursements</u> (et non plus des amortissements).

Donc en divisant par N (le nombre d'obligations encore vivantes),

$$\frac{V}{N} = \frac{U}{N} + \frac{P}{N} = V_m = U_m + P_m$$

la définition de l'usufruit unitaire reste inchangée :

$$\boxed{u = \frac{Um}{Ci}} \quad (417)$$

la définition de la nue-propriété est quant à elle modifiée :

$$\boxed{p = \frac{Pm}{R}} \quad (418)$$

Donc :

$$\boxed{Vm = Ciu + Rp} \quad (419)$$

Le facteur d'actualisation p s'applique ici à la valeur de remboursement R.

La relation $ut + p = 1$ (formule 406) est inchangée.

La formule de p est celle d'un emprunt indivis ayant les mêmes clauses de remboursement.

Il existe cependant une exception : celle de l'emprunt à annuités constantes.

En effet dans ce cas, le calcul de p diffère, car l'existence d'une prime de remboursement modifie la loi des amortissements **(voir note technique I).**

d) <u>cas de l'emprunt obligataire à annuités constantes avec prime de remboursement :</u>

On sait que si $R > C$:

– On définit i' (taux apparent) par :

$$i' = i.\frac{C}{R}$$

Donc $NC.i = NR.i'$

On vérifie bien qu'il suffit :
- de remplacer le nominal par R,
- le taux nominal par i' et p, la nue-propriété unitaire par la formule (418). Avec comme à l'alinéa (c) :

$$u = \frac{U_m}{C.i}$$

(cf. formule 417)

$$\boxed{p = \frac{P_m}{R}}$$

(cf. formule 418)

N.B. Il est tout aussi simple de calculer :

$$V = a\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

avec $$a = N.R\frac{i'}{1-(1+i')^{-n}}$$

$$\Rightarrow \quad V = N\,R\frac{i'}{1-(1+i')^{-n}}\;\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

9° Taux de revient et taux de rendement d'un emprunt obligataire

Nous avons abordé ces notions au Chapitre I ; mais le cas général ne peut être traité qu'au moyen des concepts utilisés dans la théorie de l'évaluation.

En effet, le taux de rendement de l'opération pour un obligataire n'est autre que le taux qui égalise son décaissement (E) à la date 0, et l'évaluation à la même date de ses encaissements futurs.

De même, le taux de revient pour l'emprunteur égalise à la date 0, l'encaissement (E-f) et l'évaluation à la même date de ses décaissements futurs.

– les amortissements sont en progression géométrique de raison (1+i') (cf. formule (313)).

– et de premier terme $\mu_1 = N. \dfrac{i'}{(1+i')^n - 1}$

Donc les différentes composantes de la nue-propriété vont être calculées comme si l'emprunt était de nominal R et de taux i'.

On aboutit aux formules suivantes :

$$\boxed{Vm = Ciu + R\,p}$$

formule générale (419)

et

$$\boxed{p = \frac{i'}{1-(1+i')^{-n}} \cdot \frac{(1+i')^{-n} - (1+t)^{-n}}{t - i'}} \quad (420)$$

$ut + p = 1$

$\Rightarrow$

$$Vm = Ci\,\frac{(1-p)}{t} + Rp = C.\frac{i}{t} + p\left(R - \frac{Ci}{t}\right)$$

Or $Ci = R.i'$.

d'où :

$$\boxed{Vm = R\left[\frac{i'}{t} + \left(1 - \frac{i'}{t}\right) p\right]} \quad (421)$$

Mais les calculs n'étaient possibles que dans l'hypothèse d'annuités constantes. Ils le sont désormais dans le cas général. Il suffit de considérer pour cela que l'évaluation à l'origine Vm n'est autre, pour le souscripteur, que la valeur d'émission E.
On généralise donc les formules obtenues en (408) en conservant les facteurs d'actualisation u et p précédemment établis.

a) cas de frais à l'émission :

On suppose ici que les seuls frais encourus le sont par l'emprunteur et qu'ils se limitent à un montant unitaire (f) par obligation à l'émission.

Taux de rendement :

il est obtenu grâce à l'équation :

$$Vm = E$$

$$\boxed{E = Ciu + Rp} \quad (422)$$

avec $ut + p = 1$; u et p étant fonctions de t.

C'est cette formule appliquée à l'émission qui permet de calculer le taux actuariel d'un emprunt. Il s'agit du taux d'évaluation qui satisfait à l'équation (422).

Taux de revient.

On remplace E par (E - f)

$$\boxed{(E - f) = Ciu + Rp} \quad (423)$$

Le taux d'évaluation est là encore l'inconnue de l'équation.

b. généralisation :

Il se peut qu'il existe d'autres frais :

– à la charge de l'emprunteur :

* des frais de coupon α' par coupon versé.

On définit ce coupon chargé :

$$\alpha = C.i + \alpha'$$

* des frais de remboursement : λ' par titre remboursé. On définit le remboursement chargé : $\lambda = R + \lambda'$ (ou $C + \lambda'$ en cas de remboursement au pair).

*des frais fixes annuels G

– à la charge des souscripteurs : une retenue à la source de x (exprimé en %) sur chaque coupon.

On adapte alors les formules établies en (a), tout en conservant les mêmes facteurs d'actualisation u et p.

taux de revient :

il est déterminé par l'équation suivante :

$$\boxed{(E - f) = \alpha\, u + \lambda\ \ p + \frac{G}{N} . \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}} \qquad (424)$$

taux de rendement actuariel net

$$\boxed{E = Ci\ (1 - x)\, u + R\, p} \qquad (425)$$

le

En fait x, taux du prélèvement libératoire sur le coupon est égal à 25 %.

Avec dans tous les cas ut + p = 1 ; le taux d'évaluation t devient l'inconnue dans les équations.